Université d'Orléans

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX **Option : DEUG A**

Premier problème (*sur 7 points*)

Dans tout ce problème a, b, α et β sont des paramètres réels. Chaque fois que le cas se présente, on discutera d'abord suivant les valeurs de a et b, ensuite suivant les valeurs de α et β.

1.1 Étudier la série entière de terme général $u_n = c_n x^n$ dont le coefficient vérifie la relation de récurrence :

$$ac_n = bc_{n-1} \ . \tag{1}$$

1.2 Dans le cas où cette série converge, calculer sa somme.

2. On considère l'équation différentielle

$$(a-b)y'' - 2(2a-b)y' + (3a-b)y = g(x) \ , \tag{2}$$

où $g : x \to g(x)$ est une fonction numérique de x.

2.1 Donner la solution générale de l'équation (2) lorsque $g(x) = 0$.

2.2 Donner la solution générale de l'équation (2) lorsque :

- ▷ (i) $g(x) = g_1(x) = a + bx$;
- ▷ (ii) $g(x) = g_2(x) = \alpha e^{\beta x}$.

2.3 Donner la solution générale de l'équation (2) lorsque $g(x) = g_3(x) = g_1(x)\, g_2(x)$, uniquement dans les cas particuliers suivants :

- ▷ (i) $a = b \neq 0$;
- ▷ (ii) $b \neq a = 0$.

3. On considère maintenant l'équation différentielle

$$x^2(a-bx)y'' - 2x(2a-bx)y' + 2(3a-bx)y = 6a^2 \ . \tag{3}$$

3.1 On se propose de trouver la solution générale de (3) sous forme d'une série entière

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \ .$$

Calculer les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 et d'une façon générale c_k, pour tout $k \geq 4$.

3.2 En sommant la série précédente trouver la solution générale de l'équation (3).

4. Retrouver directement la solution générale de l'équation (3) des deux façons suivantes :

4.1 En effectuant successivement les changements de fonctions $u = (a - bx)y$ et $t = ux^{-2}$.

4.2 En montrant que l'équation (3) sans second membre admet une solution sous la forme $z = x^r$, $r \in \mathbb{R}$.

Second problème (*sur 13 points*)

Soit $\mathbb{E}_n$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n ; $\mathbb{F}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{E}_n$ divisibles par le monôme X et, pour $i = 0, 1$, $\mathbb{H}_n^{(i)}$ l'ensemble des polyômes P de $\mathbb{E}_n$ vérifiant la relation $P(1) = i$. On note par

$$\mathbb{E} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_n \quad \text{et} \quad \mathbb{H} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}_n^{(1)} .$$

1.1 Les ensembles $\mathbb{F}_n$, $\mathbb{H}_n^{(0)}$, $\mathbb{H}_n^{(1)}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}_n$? Si oui, donner la dimension et définir une base de l'espace correspondant.

1.2 Calculer la dimension et donner une base de $\mathbb{F}_n \cap \mathbb{H}_n^{(0)}$.

1.3 Montrer que $\mathbb{E}_n = \mathbb{F}_n + \mathbb{H}_n^{(0)}$.

2. On considère l'application ϕ définie dans $\mathbb{E}_n$ par :

$$\phi(P) = Q = P + XP'' , \tag{4}$$

où P'' est la dérivée seconde de P.

2.1 Pour $P \in \mathbb{F}_n$ montrer que (4) définit un automorphisme de $\mathbb{F}_n$. Calculer sa matrice associée M_n dans la base de $\mathbb{F}_n$ définie dans 1.1 . Calculer l'inverse de M_4.

2.2 Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de M_n. Définir les sous-espaces propres. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la matrice M_n peut-elle être diagonalisée ?

3.1 Calculer $\phi^2(P) = \phi(Q)$, $\phi^3(P)$, pour $P \in \mathbb{F}_4$. Même question pour $P \in \mathbb{F}_n$.

3.2 Montrer que la matrice M_4 peut s'écrire sous la forme suivante $M_4 = I + \alpha J$, où I est la matrice unité , J une matrice carrée, toutes deux d'ordre 4, et α une constante réelle à déterminer.

3.3 Calculer M_4^k et $\phi^k(P)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour $P \in \mathbb{E}_4$.

4. On considère l'application $\psi : \mathbb{H}_n^{(0)} \to \mathbb{E}_n$, restriction de ϕ à $\mathbb{H}_n^{(0)}$.

4.1 Déterminer l'image $\mathrm{im}(\psi)$ et le noyau $\ker(\psi)$ de ψ, et donner leurs dimensions.

4.2 Quelle relation doivent vérifier les coefficients d'un polynôme $P \in \mathbb{H}_n^{(0)}$ pour que :

- ▷ (i) $\psi(P) \in \mathbb{H}_n^{(0)}$;
- ▷ (i) $\psi(P) \in \mathbb{F}_n$?

5. Pour tout P et $Q \in \mathbb{E}_n$, on définit dans $\mathbb{E}_n$ la forme bilinéaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(u)Q(u)du . \tag{5}$$

5.1 Montrer que (5) confère à $\mathbb{E}_n$ la structure d'espace vectoriel normé et spécifier sa norme qui sera notée $\| \cdot \|$.

5.2 Donner les conditions que doivent satisfaire deux polynômes P et Q de $\mathbb{E}_n$ pour qu'ils soient unitaires (de norme égale à 1) et orthogonaux. Écrire les relations correspondantes entre les coefficients de deux polynômes de $\mathbb{E}_4$.

6. On définit dans $\mathbb{E}$ une suite de polynômes orthogonaux $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$, tels que $P_n \in \mathbb{H}$ et soit de degré n.

6.1 Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4. Montrer que le calcul de P_n peut se ramener à la résolution d'un système d'équations.

6.2 La famille $\{P_k\}_{0 \leq k \leq n}$ peut-elle constituer une base de $\mathbb{E}_n$?

6.3 Démontrer que P_n est orthogonal à tout monôme X^k de degré $k < n$. En déduire que P_n est orthogonal à $\mathbb{E}_{n-1}$.

7.1 Étant donné un entier positif n, montrer qu'il existe un polynôme unique $A \in \mathbb{E}_{2n}$ divisible par $(X-1)^n$ et tel que $P_n = A^{(n)}$, où $A^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de A.

7.2 D'autre part, montrer que A est divisible par le monôme X^n. En déduire que $A = q_n(X^2 - X)^n$ où q_n est une constante que l'on calculera.

8.1 Montrer qu'il existe une constante positive λ telle que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $P \in \mathbb{E}_n$ on a $|P'(x)| \leq \lambda \|P\|$.

8.2 En déduire que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $P \in \mathbb{F}_n$ on a $|P''(x)| \leq \lambda^2 \|P\|$ et que $\|xP''\| \leq \lambda^2 \|P\|$.

9. Les calculs demandés dans les questions suivantes, peuvent être effectués avec les calculatrices programmables; si l'on s'en sert, signaler le et donner les réponses en fractions rationnelles, puis sous forme décimale à 10^{-4} près.

9.1 Calculer la matrice des interdistances

$$D = (d_{kh})_{0 \leq k \text{et} h \leq 4} \quad , \quad \text{où} \quad d_{kh} = d(P_k, P_h) = \|P_k - P_h\|$$

est la distance entre deux polynômes P_k et P_h de la base du 6.2 de $\mathbb{E}_4$.

9.2 Une seule des distances n'est pas irrationnelle ; laquelle ? Quelle est la plus "petite" distance ; quelle est la plus "grande" distance ?